Απειροστικός III – Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

Άσκηση 1. *Εξετάστε κατά πόσο οι παρακάτω απεικονίσεις* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *είναι 1-1 και επί:*

$$T(x, y) = (\sin x, \cos y), \qquad T(x, y) = (x^2, y), \qquad S(x, y, z) = (y \sin x, z \cos y, xy).$$

Άσκηση 2. *Έστω* $D^* = [0, 1]^2$ *και* D *παραλληλόγραμμο με κορυφές* $(0, 0)$, $(-1, 3)$, $(-2, 0)$, $(-1, -3)$. *Βρείτε μια γραμμική απεικόνιση που πάει το* D^* *στο* D, *δηλ.* $T(D^*) = D$.

Άσκηση 3. *Έστω η απεικόνιση* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *σφαιρικών συντεταγμένων*

$$T(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi).$$

Είναι η απεικόνιση T *1-1; Αν όχι, μπορούμε να μικρύνουμε το πεδίο ορισμού της* T *ώστε να είναι 1-1; Πόσο 'μεγάλο' μπορεί να είναι το πεδίο ορισμού της* T *σε αυτή την περίπτωση;*

Άσκηση 4. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα*

$$\int\int_D e^{x^2+y^2} dxdy, \qquad \int\int_D (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy,$$

όπου $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Άσκηση 5. *Έστω ο μετασχηματισμός* $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ *με τύπο* $T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$. *Βρείτε την εικόνα* D *του ορθογωνίου* $D^* = [0, 1] \times [1, 2]$ *μέσω του* T *και υπολογίστε τα ολοκληρώματα*

$$\int\int_D xy dxdy, \qquad \int\int_D (x - y) dxdy$$

αλλάζοντας μεταβλητές ώστε η ολοκλήρωση να γίνεται στο D^*.

Άσκηση 6. *Ολοκληρώστε την* $ze^{x^2+y^2}$ *στον κύλινδρο* $x^2 + y^2 \leq 4$, $2 \leq z \leq 3$.

Άσκηση 7. *Χρησιμοποιήστε σφαιρικές συντεταγμένες για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:*

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^2} dzdydx$$

Άσκηση 8. *Υπολογίστε* (i) *τον όγκο του ελλειψοειδούς* $E = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ *και* (ii) *το ολοκλήρωμα*

$$\int\int\int_E \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} dxdydz,$$

όπου $a, b, c > 0$. *[Υπόδειξη: Θεωρήστε το γραμμικό μετασχηματισμό* $(x, y, z) \to (au, bv, cw)$ *και κατόπιν σφαιρικές συντεταγμένες για τα* u, v, w.*]*